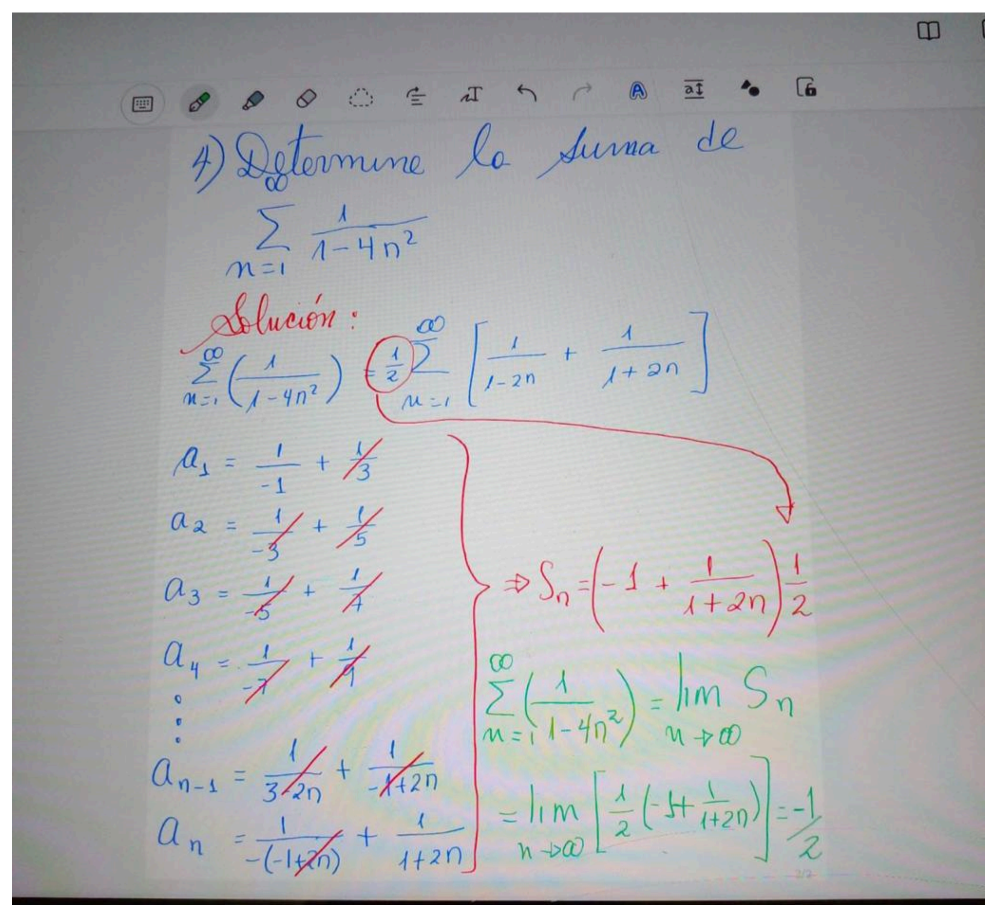


4) Determine la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2}$$

Solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-4n^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right]$$

$a_1 = \frac{1}{-1} + \frac{1}{3}$

$a_2 = \frac{1}{-3} + \frac{1}{5}$

$a_3 = \frac{1}{-5} + \frac{1}{7}$

$a_4 = \frac{1}{-7} + \frac{1}{9}$

$\vdots$

$a_{n-1} = \frac{1}{3-2n} + \frac{1}{-1+2n}$

$a_n = \frac{1}{-(-1+2n)} + \frac{1}{1+2n}$

$$\Rightarrow S_n = \left(-1 + \frac{1}{1+2n}\right)\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-4n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{1+2n}\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

Se conoce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ es convergente (Serie p: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\forall\, p > 1$) pues en este caso $p = \frac{4}{3} > 1$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$

Converge y al quitar 9 términos también converge

$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$, con lo cual

$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$ Converge

ABSOLUTAMENTE

En efecto:

•) Si $x=-5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$

$\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n . n| = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$ diverge $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ diverge y lo hace absolutamente

•) Si $x=-3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3+4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$\therefore$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x+4)^n}$ converge $\forall x \in]-\infty,-5[\cup]-3,\infty[$

---

3) Analice si la sgte serie converge absoluta o condicionalmente. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)\, n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$

Solución

La serie alterna se puede reescribir como $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$

Sea $\mu_n = \frac{(-1)^n n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$, $n \geq 10$, $n \in \mathbb{Z}$

Analizamos $\sum_{n=10}^{\infty} |\mu_n| = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{n^3}{(n^3+1)^{4/3}}$

Para $n \geq 10$

$$0 \leq \frac{n^3}{(n^3+1)^{4/3}} \leq \frac{n^3}{(n^3)^{4/3}} = \frac{1}{n^{4/3}}$$

PREGUNTA 4 (5 puntos)

Parte a: 2 puntos. Parte b: 3 puntos

a) ¿Para que valores de $b \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+b^{2n}}$ es convergente?

b) Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(x+4)^n}$ converge.

a) i) Se tiene que $0 \leq \frac{1}{1+b^{2n}} \leq \frac{1}{b^{2n}} = \left(\frac{1}{b^2}\right)^n$

Si $\frac{1}{b^2} < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^{2n}}$ converge.

Ello ocurre cuando $b^2 > 1 \Leftrightarrow |b| > 1$.

ii) Si $|b| \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+b^{2n}} = 1 \neq 0$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^{2n}}$ diverge.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^{2n}}$ converge para $|b| > 1$.

b) Usando el criterio de la razón o de D'Alembert:

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{(x+4)^{n+1}} \cdot \frac{(x+4)^n}{n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{x+4} \right| = \frac{1}{|x+4|}$$

Para que la serie converja, exigimos $0 \leq L < 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|x+4|} < 1 \Leftrightarrow |x+4| > 1,\ x \neq -4$

$\Leftrightarrow x+4 > 1 \vee x+4 < -1,\ x \neq -4$

$\Leftrightarrow x > -3 \vee x < -5,\ x \neq -4$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -5[\cup]-3, \infty[$

Falta analizar para $x = -5$ y para $x = -3$.

Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también converge con $a_n \geq 0$

Solución:

Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces si $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = M \in \mathbb{R}$$

También $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Luego,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n^2}{a_n} \right) = \lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y el límite